# □20□ □□□□□□□max□min□□

□□□□□

1□□2021·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}x^2+1$□ $g(x)=\sin x-ax$□□□ $a\in\mathbf{R}$.

□1□□□□□ $x..1$ □□ $f(x)..0$ □□ $x<1$ □□ $f(x)<0$ □

□2□□ $\max\{m,n\}$ □□ $m$□$n$ □□□□□□□ $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$.□□□□□□ $a$□□□□□ $x\in\mathbf{R}$ □ $F(x)..0$ □□□.□□□□□□

$a$□□□□□□□□□□□.

□□□□□1□□□□□□□□2□□□□ $a$ □□□□□□ $[1□+\infty)$.

□□□□

□1□□ $f(x)$ □□□□□ $f'(x)=xe^x-x=x(e^x-1)$ □□ $x$ □ $x>0,x<0,x=0$ □□□□□□□□

□2□□□□□□ $F(x)..0$ □□□□□□□ $x<0$ □□ $g(x)\geq 0$ □□□□□□□ $g(x)$ □□□ $g'(x)=\cos x-a$ □□ $a\leq 0$ □ $0<a<1$ □ $a\geq 1$ □□

□□□□□□□□□□□□□□□.

□□□□

□1□□□□ $f'(x)=xe^x-x=x(e^x-1)$ □ $x\in\mathbf{R}$.

□ $x>0$ □□ $e^x-1>0$ □□ $f'(x)>0$ □□ $x<0$ □□ $e^x-1<0$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $x=0$ □□ $f'(0)=0$ □

□□□ $x\in\mathbf{R}$ □□ $f'(x)\geq 0$ □ $f(x)$ □ $R$ □□□□□□

□ $f(0)=0$ □

□□□ $x\geq 0$ □□ $f(x)\geq f(0)=0$ □

□ $x<0$ □□ $f(x)<f(0)=0$.

□2□□□□ $F(x)$ □□□□□ $x\in\mathbf{R}$ □

□□1□□□□ $x\ge 0$ □□ $f(x)\ge 0$ □

□ $F(x)=\max\{f(x)□g(x)\}\ge f(x)$ □

□□□ $x\ge 0$ □□ $F(x)\ge 0$ □□□□

□□□ $x<0$ □□ $f(x)<0$ □□□□

□□ $F(x)\ge 0$ □□□□□ $x<0$ □□ $g(x)\ge 0$.

$g'(x)=\cos x-a$.

① □ $a\le 0$ □□ $-\frac{\pi}{2}<x<0$ □□ $0<\cos x<1$ □

□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□ $g(x)<g(0)=0$ □□□□□□

② □ $0<a<1$ □□ $-\frac{\pi}{2}<x<0$ □□□ $g'(x)=0$ □□□□ $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2}□0\right)$ □□ $x\in(x_0□0)$ □

$g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□ $g(x)<g(0)=0$ □□□□□□

③ □ $a\ge 1$ □□ $x<0$ □□□ $\cos x\le 1$ □□□□□ $x<0$ □ $g'(x)\le 0$ □ $g(x)$ □□□

□□ $g(x)>g(0)=0$ □□□□□.

□□□□□□□□□ $a$ □□□□□ $a$ □□□□□□ $[1□+\infty)$.

2□□2021·□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=(x-2)e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$ □ $g(x)=ax-\sin x-\ln(x+1)$ □□□ $a\in\mathbf{R}$.

□1□□□□□ $x\geqslant 1$ □□ $f(x)\geqslant 0$ □□ $x<1$ □□ $f(x)<0$ □

□2□□ $\max\{m,n\}$ □□ $m$□$n$ □□□□□□ $F(x)=\max\{f(x),g(x)\}$.□□□□□□ $a$ □□□□□ $x\in\mathbf{R}$ □ $F(x)\geqslant 0$ □□□.□□□□□□

$a$□□□□□□□□□□□□.

□□□□1□□□□□□□□2□□□□ $a=2$.

□□□□

□1□□ $f(x)$ □□□□□ $f'(x)=(x-1)(e^{x-1}-1)$ □□ $x$ □ $x>1, x<1, x=1$ □□□□□□□□□□

□2□□□□□□ $F(x)\geq 0$ □□□□□□□□ $-1<x<1$ □□ $g(x)\geq 0$ □□□□□□□□ $g(x)$ □□□ $g'(x)=a-\cos x-\dfrac{1}{x+1}$ □□□ $g'(x)$ □□□□

$g'(1)\leq 0$ □ $g'(1)>0$ □□□□□□□□□ $g'(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $a$.

□□□□

□1□ $f'(x)=(x-1)e^{x-1}-x+1=(x-1)(e^{x-1}-1)$ □ $x\in\mathbf{R}$,

□ $x>1$ □□ $x-1>0$ □ $e^{x-1}-1>0$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $x<1$ □□ $x-1<0$ □ $e^{x-1}-1<0$ □□ $f'(x)>0$ □

□ $x=1$ □□ $f'(1)=0$ □

□□□ $x\in\mathbf{R}$ □□ $f'(x)\geq 0$ □ $f(x)$ □ $R$ □□□□□□

□ $f(1)=0$ □

□□□ $x\geq 1$ □□ $f(x)\geq f(1)=0$ □

□ $x<1$ □□ $f(x)<f(1)=0$ □

□2□□□ $F(x)$ □□□□□ $(-1,+\infty)$ □

□□1□□□□ $x\geq 1$ □□ $f(x)\geq 0$ □□ $F(x)=\max\{f(x), g(x)\}\geq f(x)$ □

□□□ $x\geq 1$ □□ $F(x)\geq 0$ □□□□

□□□ $-1<x<1$ □□ $f(x)<0$ □□□□

□ $F(x)\geq 0$ □□□□□ $-1<x<1$ □□ $g(x)\geq 0$ □□□□

$g'(x)=a-\cos x-\frac{1}{x+1}$□$g''(x)=\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$□

□$-1<x<0$□□$-1<\sin x<0$□$\frac{1}{(x+1)^2}>1$□□$g''(x)>0$□

□$0\le x<1$□□$0\le \sin x<1$□$\frac{1}{(x+1)^2}>0$□□$g''(x)>0$□

□□□$-1<x<1$□□$g''(x)>0$□$g'(x)$□□□□□

①□$g'(1)\le 0$□□$a\le \cos 1+\frac{1}{2}$□□□$x\in(-1□1)$□□$g'(x)<g'(1)\le 0$□$g(x)$□□□□□

□□$x\in(0□1)$□□$g(x)<g(0)=0$□□□□□□□

②□$g'(1)>0$□□$a>\cos 1+\frac{1}{2}$□□$b\in\left(-1,-1+\frac{1}{a+1}\right)$□

□$-1<-1+\frac{1}{a+1}<0$□□$g'(b)=a-\cos b-\frac{1}{b+1}\le a+1-\frac{1}{b+1}<0$□

□□□□□$x_0\in(-1□1)$□□□$g'(x_0)=0$□□$x\in(-1□x_0)$□□$g'(x)<0$□$g(x)$□□□□□

□$x\in(x_0□1)$□□$g'(x)>0$□$g(x)$□□□□□

□$x_0<0$□□□$x\in(x_0□0)$□□$g(x)$□□□□□$g(x)<g(0)$□□□□□□□

□$x_0=0$□□$g(x)\ge g(0)=0$□□□□□□□□□$g'(x_0)=0$□□$a=2$□

□$x_0>0$□□□$x\in(0□x_0)$□□$g(x)$□□□□□$g(x)<g(0)$□□□□□□□

□□□□□□□□□□□$a=2$□□□□□

□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□$F(x)\ldots 0$□□□□□□$g(x)\ge 0$□$-1<x<1$□□□□□□□$g(x)$□□□□□□□

□$g(0)=0$□□□□$g'(x)$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□$a$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

3□□2021·□□·□□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=(x-4)e^{x-3}-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{7}{2}$□ $g(x)=ae^x+\cos x$□□□ $a\in\mathbf{R}$□

□1□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□ $f(x)>0$ □□□□

□2□□ $a=1$ □□□□□ $x>0$ □□ $g(x)>2$ □

□3□□ $\max\{m,n\}$ □□ $m$ □ $n$ □□□□□□□□□ $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ □□ $h(x)\geq 0$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□ $a$ □□□□□□

□□□□1□ $f(x)$ □ $R$ □□□□□□ $(3,+\infty)$ □□2□□□□□□□□3□ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}},+\infty\right)$ □

□□□□

□1□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□ $f(3)=0$ □□□□□□ $f(x)>0$ □□□□

□2□□□□□□ $y=g(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□

□3□□□□□ $x\geq 3$ □□□ $f(x)\geq 0$ □□□□□ $h(x)\geq 0$ □□□□

□□□□ $x<3$ □□ $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}=g(x)$ □□□ $g(x)\geq 0$ □ $(0,3)$ □□□□□□□

□□□□□□□□□ $a\geq -\frac{\cos x}{e^x}$ □□□□□□□ $r(x)=-\frac{\cos x}{e^x}$ □ $x\in[0,3]$□□□□□□□ $a$ □□□.

□□□□

□1□ $f'(x)=(x-3)e^{x-3}-x+3=(x-3)\left(e^{x-3}-1\right)$ □

□ $x>3$ □□ $x-3>0$ □ $e^{x-3}-1>0$ □∴ $f'(x)>0$ □

□ $x<3$ □□ $x-3<0$ □ $e^{x-3}-1<0$ □∴ $f'(x)>0$ □

□ $x=3$ □□ $f'(x)=0$ □

□□□ $x\in\mathbf{R}$ □□ $f'(x)\geq 0$ □□ $f(x)$ □ $R$ □□□□□□

□ $f(3)=0$ □□□ $f(x)>0$ □□□□ $(3,+\infty)$ □

（2）$g'(x)=e^x-\sin x$.

由 $x>0$，得 $e^x>1$，$\sin x\in[-1,1]$，

则 $g'(x)=e^x-\sin x>0$，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

故 $g(x)>g(0)=2$，即 $g(x)>2$.

（3）由（1）知，

当 $x\geq 3$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，故 $h(x)\geq 0$ 恒成立；

当 $x<3$ 时，$f(x)<0$，因为 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，要使得 $h(x)\geq 0$ 恒成立，

只要 $g(x)\geq 0$ 在 $(0,3)$ 上恒成立即可.

由 $g(x)=ae^x+\cos x\geq 0$，得 $a\geq -\dfrac{\cos x}{e^x}$.

设函数 $r(x)=-\dfrac{\cos x}{e^x}$，$x\in[0,]$，

则 $r'(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

令 $r'(x)=0$，得 $x=\dfrac{3}{4}$.

随着 $x$ 变化，$r'(x)$ 与 $r(x)$ 的变化情况如下表所示：

| $x$ | $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ | $\frac{3}{4}$ | $\left(\frac{3}{4},3\right)$ |
|---|---|---|---|
| $r'(x)$ | + | 0 | - |
| $r(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以 $r(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{3}{4},3\right)$ 上单调递减.

$r(x)$□$(0,3)$□□□□□□□□□□□□□□ $r\left(\frac{32}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}}$ □□ $a\geq\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}}$

□□□□□□□□□ $a$ □□□□□□ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}},+\infty\right)$ □

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□(□□)□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

(1)□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

(2)□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

(3)□□□□□□□□□□(□□)□□□□□□□□□□□□

(4)□□□□□□□□□□□□□

4□□2019·□□□□·□□□□□□□□□ $f(x)=(x-a)\ln x-x+\frac{3}{2}a$.

□I□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□ $a$ □□□□□□

□II□□ $\frac{1}{2}\sqrt{e}\leq a\leq 2e^2$ □□□ $f(x)$ □□□□□ $\min\{f(x)\}$ □□□□ $0\leq\min\{f(x)\}\leq\frac{e\sqrt{e}}{2}$.

□□□□□I□ $a\leq-\frac{1}{e}$ □□II□□□□

□□□□

□I□□□□□□ $f'(x)\geq0$ □ $f'(x)\leq0$ □□□□□ $g$□$x$□□ $x\ln x$ □□□□□□□ $g$□$x$□□□□□□□□□□□ $a$ □□□

□II□□□I□□□□ $\frac{1}{2}\sqrt{e}\leq a\leq 2e^2$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□ $x_0$ □□□ a= $x_0\ln x_0$ □□□ $\sqrt{e}\leq x_0\leq e^2$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□

$\min\{f(x)\}=f(x_0)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□□□□

□I□□□□ $f'(x)=\ln x-\frac{a}{x}=\frac{x\ln x-a}{x}$ □□□□□□

□ $g(x)=x\ln x$ □□ $g'(x)=\ln x+1$ □ $g(x)$ □ $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ □□□□ $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ □□□□

□ $x=\frac{1}{e}$ □ $g(x)$ □□□□□□□□ $g(x)=x\ln x\ge g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ □

□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□ $f'(x)\ge 0$ □ $f'(x)\le 0$ □□□□□□ $a\le -\frac{1}{e}$.

□Ⅱ□□ $f'(x)=0$ □□a=xlnx□ $g(x)$ □□ $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ □□□□

□ $\frac{1}{2}\sqrt{e}\le a\le 2e^2$ □□□ $(0,+\infty)$ □□□□ $x_0$ □□□a= $x_0 lnx_0$

□□ $g(x)=x\ln x$ □□□□□□ $\sqrt{e}\le x_0\le e^2$ □□ $\frac{1}{2}\le \ln x_0\le 2$ □

□□ $f(x)$ □□□□□ $\min|f(x)|=f(x_0)=(x_0-a)\ln x_0-x_0+\frac{3}{2}a$ □□ $a=x_0\ln x_0$ □□□

□ $\min|f(x)|=f(x_0)=x_0\left[\ln x_0\left(\frac{5}{2}-\ln x_0\right)-1\right]=(-x_0)\left(\ln x_0-\frac{1}{2}\right)(\ln x_0-2)\ge 0$ □

□□□ $\min|f(x)|=f(x_0)\ge 0$ □

□□□□□□ $h(x)=(-x)\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)(\ln x-2)$ □□□□ $h'(x)=-\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)(\ln x+1)$ □

□ $\sqrt{e}\le x\le e^2$ □□□□ $x=e\sqrt{e}$ □ $h(x)$ □□□□□□□□□ $h(x)\le h(e\sqrt{e})=\frac{e\sqrt{e}}{2}$ □

□ $\min|f(x)|=f(x_0)\le\frac{e\sqrt{e}}{2}$ □

□□□□□ $0\le\min|f(x)|\le\frac{e\sqrt{e}}{2}$.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

5□□2019·□□·□□□□□□□□ $e$ □□□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ □ $F(x)=f(x)-x+\frac{1}{x}$ □□□□□□ $(0,+\infty)$.

□1□□□□ $f(x)$ □□ $(1,\ f(1))$ □□□□□□

□2□□□□□ $F(x)$ □□□□□ $x_0$ □□ $x_0\in(1,2)$ □

□3□□ $\min\{m,n\}$ □□ $m$ □ $n$ □□□□□ $x>0$ □ $g(x)=\min\{f(x),x-\frac{1}{x}\}$ □□□□ $h(x)=g(x)-cx^2$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□ $c$

□□□□□□

□□□□□1□ $y=\frac{1}{e}x$ □2□□□□3□ $(-\infty,-\frac{1}{2e^3}]$

□□□□

(1)□□□□□□□□□□□□□ $f(x)$ □□ $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ □□□□□□□ $y=\frac{1}{e}x$ .□2□□□□□ $F(1)F(2)<0$ □□□ $F(x)$ □□□□ $x_0$ □□ $x_0\in(1,2)$ .

□□□ $F(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□□ $F(x)$ □□□□□□ $x_0$ □□ $x_0\in(1,2)$ .(3)□□□ $h(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{x}-cx^2,0<x\le x_0\\ \frac{x^2}{e^x}-cx^2,\quad x>x_0\end{cases}$ □

$h(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□ □ $h'(x)\ge0$ □ $(0,x_0)$ □ $(x_0,+\infty)$ □□□□□ $c\le\frac{2-x}{2e^x}$ □□□ $(x_0,+\infty)$ □□□□. □

$u(x)=\frac{2-x}{2e^x}(x>x_0)$ □□□□□ $c\le[u(x)]_{\min}$ □□□□□□□ $u(x)$ □□□□ $[u(x)]_{\min}=u(3)=-\frac{1}{2e^3}$ □□ □ $c\le-\frac{1}{2e^3}$.

□□□□

□1□∵ $f'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$ □

∴□□□□□ $k=f'(1)=\frac{1}{e}$ □ $f(1)=\frac{1}{e}$.

∴□□ $f(x)$ □□ $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ □□□□□□□ $y=\frac{1}{e}x$.

□2□□□□∵ $F(x)=f(x)-x+\frac{1}{x}$ □ $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ □

∴ $F(1)=\frac{1}{e}>0$□$F(2)=\frac{4}{e^2}-\frac{3}{2}<0$□$F(1)F(2)<0$□

∴ $F(x)$□□□□$x_0$□□$x_0\in(1,2)$.

∵ $F'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}-1-\frac{1}{x^2}$□

∴□$x\geq 2$□□$F'(x)<0$□

□$0<x<2$□□□$x(2-x)\leq\left[\frac{x+(2-x)}{2}\right]^2=1$□

$F'(x)\leq\frac{1}{e^x}-1-\frac{1}{x^2}<1-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}<0$.

∴ $F(x)$□$(0,+\infty)$□□□□.

∴□$x_1>0$□$x_2>0$□$x_1\neq x_2$□□$F(x_1)\neq F(x_2)$.

∴□□$F(x)$□□□□□□$x_0$□□$x_0\in(1,2)$.

□3□□□$g(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{x},0<x\leq x_0\\ \frac{x^2}{e^x}, \quad x>x_0\end{cases}$□□$h(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{x}-cx^2,0<x\leq x_0\\ \frac{x^2}{e^x}-cx^2, \quad x>x_0\end{cases}$□

∵□□$F(x)$□□□□□□$x_0$□

∴ $F(x_0)=0$□□$x_0-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$.

∴ $x_0-\frac{1}{x_0}-cx_0^2=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}-cx_0^2$.

∴ $h(x)$□$(0,+\infty)$□□□□ $\Leftrightarrow$ $h'(x)\geq 0$□$(0,x_0)$□$(x_0,+\infty)$□□□.

□$x>x_0$□$h'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}-2cx\geq 0$□□$c\leq\frac{2-x}{2e^x}$□□□$(x_0,+\infty)$□□□□.

□ $u(x)=\frac{2-x}{2e^{x}}(x>x_0)$ □□□ $c\le\left[u(x)\right]_{\min}$ □

$u'(x)=\frac{x-3}{2e^{x}}$ □ $u(x)$ □ $(x_0,3)$ □□□□□ $(3,+\infty)$ □□□.

$u(x)$ □□□□ $\left[u(x)\right]_{\min}=u(3)=-\frac{1}{2e^{3}}$ □ $c\le-\frac{1}{2e^{3}}$.

□ $0<x<x_0$ □□ $h'(x)=1+\frac{1}{x^{2}}-2cx$ □□□□□ $c<0$ □□ $h'(x)>0$ □ $(0,x_0)$ □□□.

□□□□□□ $c$ □□□□□□ $\left(-\infty,-\frac{1}{2e^{3}}\right]$.

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□.

6□□2018·□□·□□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=x^{2}e^{-x},g(x)=x\ln x$.

□1□□ $F(x)=f(x)-g(x)$ □□□□ $F(x)$ □ $\left(0,+¥\right)$ □□□□□□□□

□2□□□□ $h(x)=\min\left\{f(x),g(x)\right\}$ □□ $\min\left\{a,b\right\}$ □□ $a,b$ □□□□□□□□ $h(x)\le\lambda$ □□ $\lambda$ □□□□□.

□□□□□1□□□□□□□2□ $\left[4e^{2},+\infty\right)$.

□□□□

□□□□□1□□□ $F(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.□2□□□□

$h(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

□□□□□

□□(1)□□ $F(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □□□ $F(x)=x^{2}e^{-x}-x\ln x$ □□ $0<x\le1$ □□ $F(x)>0$ □□ $F(2)=\frac{4}{e^{2}}-2\ln2<0$ □□□

$F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□.□□ $F'(x)=\frac{x(2-x)}{e^{x}}-(\ln x+1)=\frac{-(x-1)^{2}+1}{e^{x}}-(\ln x+1)$ □□ $x>1$ □□

$\frac{-(x-1)^2+1}{e^x}\le\frac{1}{e^x}<\frac{1}{e}$, $-(\ln x+1)<-1$，所以 $F'(x)<\frac{1}{e}-1<0$，则 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点.

(2) 由 (1) 得，$F(x)$ 在 $(1,2)$ 上存在唯一零点 $x_0$，$x\in(0,x_0)$ 时，$f(x)>g(x)$；$x\in(x_0,+\infty)$ 时，

$f(x)<g(x)$，$\therefore h(x)=\begin{cases}x\ln x, & x\in(0,x_0)\\ x^2e^{-x}, & x\in[x_0,+\infty)\end{cases}$. 当 $x\in(0,x_0)$ 时，由于 $x\in(0,1]$，$h(x)\le0$；$x\in(1,x_0)$ 时，$h'(x)=\ln x+1>0$，

于是 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 单调递增，则 $0<h(x)<h(x_0)$，所以当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<h(x_0)$. 当 $x\in[x_0,+\infty)$ 时，因为

$h'(x)=x(2-x)e^{-x}$，$x\in[x_0,2]$ 时，$h'(x)\ge0$，则 $h(x)$ 在 $[x_0,2]$ 单调递增；$x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 单调递减，于是当 $x\ge x_0$ 时，$h(x)\le h(2)=4e^{-2}$，所以函数 $h(x)$ 的最大值为 $h(2)=4e^{-2}$，所以 $\lambda$ 的取值范围为 $[4e^{-2},+\infty)$.

7.（2016·广西来宾·一模（理））已知函数 $f(x)=x\ln x, g(x)=\frac{x}{e^x}, F(x)=f(x)-g(x)$.

（1）证明 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且仅有唯一实根；

（2）记 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内的实根为 $x_0$，函数 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，若方程 $m(x)=n(n\in R)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 有两不等实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，试判断 $x_1+x_2$ 与 $2x_0$ 的大小，并给出对应的证明.

【答案】（1）证明见解析；（2）$x_1+x_2>2x_0$，证明见解析.

【解析】

试题分析：（1）只需证明 $F(x)=x\ln x-\frac{x}{e^x}$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，且 $F(1)<0, F(2)>0$ 即可；（2）先证且存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$，故 $1<x<x_0$ 时，$f(x)<g(x)$；当 $x>x_0$ 时，$f(x)>g(x)$，再用分析法证明 $x_1+x_2>2x_0$ 即证 $x_2>2x_0-x_1>x_0$.

□□□□□1□□□□ $F(x)=x\ln x-\frac{x}{e^x}$ □□□□□ $x\in(0,+\infty)$, $F'(x)=1-\ln x+\frac{x-1}{e^x}$ □□ $x\in(1,2)$ □

□ $F'(x)>0$ □□ $F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□□

□ $F(1)=-\frac{1}{e}<0, F(2)=2\ln 2-\frac{2}{e^2}>0$ □□ $F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□ $F(x)$ □□□ $(1,2)$ □□□□□□□□□□

□2□□ $0<x\le 1$ □□ $f(x)=x\ln x\le 0$ □□ $g(x)=\frac{x}{e^x}>0$ □□□□□ $f(x)<g(x)$ □

□□1□□□ $F'(x)=1+\ln x+\frac{x-1}{e^x}$ □□ $x>1$ □□ $F'(x)>0$ □

□□□ $x_0\in(1,2)$ □□□ $F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$ □□ $1<x<x_0$ □□ $f(x)<g(x)$ □□ $x>x_0$ □□ $f(x)>g(x)$ □

□□ $m(x)=\begin{cases} x\ln x, 0<x\le x_0 \\ \frac{x}{e^x}, x>x_0 \end{cases}$ □

□□□ $1<x<x_0$ □□ $m(x)=x\ln x, m'(x)=1+\ln x>0$ □□□ $m(x)$ □□□

□ $x>x_0$ □□ $m(x)=\frac{x}{e^x}, m'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$ □□□ $m(x)$ □□□

$m(x)=n$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□ $x_1,x_2$ □□ $x_1\in(1,x_0), x_2\in(1,+\infty)$ □

□□□ $x_2\to+\infty$ □□ $x_1+x_2>2x_0$ □□□□□□□□□□□□□□□□ $x_1+x_2>2x_0$ □□ $x_2>2x_0-x_1>x_0$ □

□ $m(x)$ □ $(x_0,+\infty)$ □□□□□□□ $m(x_2)<m(2x_0-x_1)$ □□□ $m(x_1)=m(x_2)$ □

□□ $m(x_1)<m(2x_0-x_1)$ □□ $x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$ □

□ $h(x)=x\ln x-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}, 1<x<x_0$ □□□ $h(x_0)=0$ □

$h'(x)=1+\ln x+\frac{1+x-2x_0}{e^{2x_0-x}}=1+\ln x+\frac{1}{e^{2x_0-x}}-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}$ □

□ $\varphi(t)=\frac{t}{e^t}, \varphi'(t)=\frac{1-t}{e^t}$ □□ $t\in(0,1)$ □□ $\varphi'(t)<0$ □ $t\in(1,+\infty)$ □□ $\varphi'(t)>0$ □ $\varphi(t)_{\max}=\frac{1}{e}$ □

□ $\varphi(t)>0$ □ $0<\varphi(t)<\frac{1}{e}$ □□ $2x_0-x>0$ □□□ $-\frac{1}{e}<-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}<0$ □

□□ $h(x)=1+\ln x+\dfrac{1+x-2x_0}{e^{2x_0-x}}=1+\ln x+\dfrac{1}{e^{2x_0-x}}-\dfrac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}>1-\dfrac{1}{e}>0$ □

□ $h(x)$ □□□□□ $1<x<x_0$ □□ $h(x)<h(x_0)=0$ □□ $x_1\ln x_1<\dfrac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$ □

□ $x_1+x_2>2x_0$ □□□

□□□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□2□□□□□□□□□□.

□□□□□□□□ $f(x)=0,$ □□□□□□□□□□□□①□□□□□□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□②□□□□□□□□□□□□□□□□□□

$[a,b]$ □□□□□□□□□□□□ $f(a)\cdot f(b)<0,$ □□□□□□□□□□□□□(□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□) □□□□□□□□□□□③□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.□□□1□□□□□□□□□□②□□□.

8□□2016·□□□□·□□□□□□□□□□□ $f(x)=x\ln x, g(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

□1□□ $F(x)=f(x)-g(x)$ □□□ $F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□□□□□□□□□

□2□□ $F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□ $x_0$ □ $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ □□ $m(x)=n(n\in R)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□ $x_1,x_2(x_1<x_2)$ □□□

$x_1+x_2$ □ $2x_0$ □□□ □□□□□□□□□.

□□□□1□□□□□□2□ $x_1+x_2>2x_0$

□□□□

□□□□□□1□□□ $F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.□□□□□

□□□□□□□□□□□ $F(x)=1+\ln x+\dfrac{x-1}{e^x}$ □ $x\in(1,2)$ □□ $F(x)>0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

$F(1)=-\dfrac{1}{e}<0, F(2)=2\ln 2-\dfrac{2}{e^2}>0$ □2□□□□□□□□□□□□□□□□ $m(x)=\begin{cases}x\ln x, 0<x\le x_0\\ \dfrac{x}{e^x}, x>x_0\end{cases}$ □□□□ $x_1,x_2(x_1<x_2)$ □□□□□

$x_1\in(1,x_0),x_2\in(x_0,+\infty)$ □□□□□“□□”□□ $m(x_1)$ □ $m(2x_0-x_1)$ □□□ $m(x_1)<m(2x_0-x_1)$ □□ $m(x_2)<m(2x_0-x_1)$ □□

$x_2>x_0$□$2x_0-x_1>x_0$ □ $m(x)$ □ $(x_0,+\infty)$ □□□□□□□ $x_2>2x_0-x_1$ □□ $x_1+x_2>2x_0$

□□□□□1□□□□□ $F(x)=x\ln x-\frac{x}{e^x}$ □□□□□ $x\in(0,+\infty)$ □ $F'(x)=1+\ln x+\frac{x-1}{e^x}$ □□ $x\in(1,2)$ □□ $F'(x)>0$ □□

$F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□

□ $F(1)=-\frac{1}{e},F(2)=2\ln 2-\frac{2}{e^2}>0$ □□ $F(x)$ □ $(1,2)$ □□□□□□□□□□□□□□□

$F(x)$ □□□ $(1,2)$ □□□□□□□

□2□ □ $0<x\le 1$ □□ $f(x)=x\ln x\le 0$ □□ $g(x)=\frac{x}{e^x}>0$ □□□□ $f(x)<g(x)$ □□□1□□□ $F'(x)=1+\ln x+\frac{x-1}{e^x}$ □□

$x>1$ □□ $F'(x)>0$ □□□□ $x_0\in(1,2)$ □□ $F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$ □□ $1<x<x_0$ □□ $f(x)<g(x)$ □□ $x>x_0$ □□

$f(x)>g(x)$ □□□ $m(x)=\begin{cases} x\ln x, 0<x\le x_0 \\ \frac{x}{e^x}, x>x_0 \end{cases}$ □

□□□ $1<x<x_0$ □□ $m(x)=x\ln x, m'(x)=1+\ln x>0$ □□ $m(x)$ □□□□ $x>x_0$ □□ $m(x)=\frac{x}{e^x}$ □ $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$ □□□

$m(x)$ □□□ $m(x)=n$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□□ $x_1,x_2$ □□ $x_1\in(1,x_0),x_2\in(x_0,+\infty)$

□□□ $x_2\to+\infty$ □□ $x_1+x_2>2x_0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□ $x_1+x_2>2x_0$ □

□ □ $x_2>2x_0-x_1>x_0$ □ □ $m(x)$ □ $(x_0,+\infty)$ □ □ □ □ □ □ □ $m(x_2)<m(2x_0-x_1)$ □ □ □ $m(x_1)=m(x_2)$ □ □ □

$m(x_1)<m(2x_0-x_1)$ □□ $x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$ □

□ $h(x)=x\ln x-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}},1<x<x_0$ □□□ $h(x_0)=0$.

$h'(x)=1+\ln x+\frac{1+x-2x_0}{e^{2x_0-x}}=1+\ln x+\frac{1}{e^{2x_0-x}}-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}$□

□$\varphi(t)=\frac{t}{e^t},\varphi'(t)=\frac{1-t}{e^t}$□□$t\in(0,1)$□□$\varphi'(t)<0$□$t\in(1,+\infty)$□□$\varphi'(t)>0$□$\varphi(t)_{\max}=\frac{1}{e}$□

□ $\varphi(t)>0$□ $0<\varphi(t)<\frac{1}{e}$□ □ $2x_0-x>0$□ □ □ $-\frac{1}{e}<-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}<0$□ □ □

$h'(x)=1+\ln x+\frac{1+x-2x_0}{e^{2x_0-x}}=1+\ln x+\frac{1}{e^{2x_0-x}}>1-\frac{1}{e}>0$□ □ $h(x)$□ □ □ □ □ $1<x<x_0$□ □ $h(x)<h(x_0)=0$□ □

$x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$□□$x_1+x_2>2x_0$□□□

□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□.

9□□2021·□□·□□□□□□□□□□ $f(x)=\ln x$.

□1□□□□□ $g(x)=f(x)-ax(a\in R)$ □□□□□

□2□□□□ $F(x)=f(x)-\frac{1}{e^x}$□ $e$□□□□□□□□□□□□□$(1,2)$□□□□□$x_0$□□ $m(x)=\min\left\{xf(x),\frac{x}{e^x}\right\}$□□□$\min\{a,b\}$□□$a$□$b$

□□□□□□□□$m(x)=n(n\in R)$□□□$(1,+\infty)$□□□□□□□□□□□$x_1$□$x_2(x_1<x_2)$□□□□$x_1+x_2>2x_0$.

□□□□□1□□□□□□□□2□□□□□□.

□□□□

□1□□□□□ $g'(x)=\frac{1-ax}{x}(x>0)$□□□ $a\le 0$□$a>0$□□$g'(x)$□□□□□□□□$g(x)$□□□□□

□2□□□□□ $F'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x}$□□□□$(1,2)$□$F(x)$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□$x_0\in(1,2)$□□$F(x_0)=0$□□□□□□□□

□$m(x)$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□$x_1+x_2>2x_0$□□□□$x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$□□□□□$h(x)=x\ln x-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}$□□□□

□□□□□□□□□ $h(x)<0$ □□□□□□.

□□□□

□1□ $g(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □ $g'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$

□ $a\le 0$ □□ $g'(x)>0$ □□□□□□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $a>0$ □□□ $g'(x)=0$ □ $x=\frac{1}{a}$ □

∴□ $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□.

□□□□□

□ $a\le 0$ □□ $g(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $a>0$ □□ $g(x)$ □ $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ □□□□□□□ $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□□□□.

□2□ $F(x)=\ln x-\frac{1}{e^x}$ □□□□□ $x\in(0,+\infty)$ □

∴ $F'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x}$ □□□ $x\in(1,2)$ □ $F'(x)>0$ □□ $F(x)$ □□□ $(1,2)$ □□□□□□□ $F(1)=-\frac{1}{e}<0$ □ $F(2)=\ln 2-\frac{1}{e^2}>0$ □□

$F(x)$ □□□ $(1,2)$ □□□□□□□□□

∴□□□□□□□□□□□ $F(x)$ □□□ $(1,2)$ □□□□□□□□□.

∴□□ $x_0\in(1,2)$ □□□ $F(x_0)=0$ □□ $\ln x_0=\frac{1}{e^{x_0}}$ □

∴□ $1<x<x_0$ □□ $f(x)<\frac{1}{e^x}$ □□ $xf(x)<\frac{x}{e^x}$ □□ $x>x_0$ □□ $f(x)>\frac{1}{e^x}$ □□ $xf(x)>\frac{x}{e^x}$ □

∴□□ $m(x)=\{\begin{matrix} x\ln x, & 1<x\le x_0 \\ \frac{x}{e^x}, & x>x_0 \end{matrix}$ □

□$1<x<x_0$□□$m(x)=x\ln x$□□$m'(x)=1+\ln x>0$□$m(x)$□□□□□

□$x>x_0$□□$m(x)=\frac{x}{e^x}$□□$m'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$□$m(x)$□□□□□

□$m(x)=n$□□□$(1,+\infty)$□□□□□□□□□□□$x_1$□$x_2\ (x_1<x_2)$□□$x_1\in(1,x_0)$□$x_2\in(x_0,+\infty)$

∴□□$x_1+x_2>2x_0$□□□$x_2>2x_0-x_1$□□$2x_0-x_1>x_0$□□$m(x)$□$(x_0,+\infty)$□□□□

□□□$m(x_2)<m(2x_0-x_1)$□□$m(x_1)=m(x_2)$□□□$m(x_1)<m(2x_0-x_1)$□□$x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$

□□$x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$□□$h(x)=x\ln x-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}$□$1<x<x_0$□□$F(x_0)=0$□□$h(x_0)=0$□

□$\varphi(t)=\frac{t}{e^t}$□□$\varphi'(t)=\frac{1-t}{e^t}$□□$t\in(0,1)$□□$\varphi'(t)>0$□□$t\in(1,+\infty)$□□$\varphi'(t)<0$□□$\varphi(t)_{\max}=\frac{1}{e}$□□$\varphi(t)>0$□□□

$0<\varphi(t)<\frac{1}{e}$□

□$2x_0-x>1$□□□$-\frac{1}{e}<-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}<0$.

∴$h'(x)=1+\ln x+\frac{1}{e^{2x_0-x}}-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}}>1-\frac{1}{e}>0$□□$h(x)$□□□□□

∴□$1<x<x_0$□□$h(x)<h(x_0)=0$□□$x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$□□$x_1+x_2>2x_0$□□□.

□□□□

□□□□□□

□1□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□2□□□□□$F(x)$□$(1,2)$□□□□□□□□□$m(x)$□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

10□□2021·□□·□□□□□□□□□□□$f(x)=x\ln x$.

□1□□□$g(x)=f'(x)+ax^2-(a+2)x\ (a>0)$□□□□□□$g(x)$□□□□□□

□2□□□□ $F(x)=f(x)-\frac{x}{e^x}$ □□□ $(1,2)$ □□□□□ $x_0$ □□ $m(x)=\min\left\{f(x),\frac{x}{e^x}\right\}$ □□ $m(x)=n(n\in R)$ □□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□□□□

$x_1,x_2(x_1<x_2)$ □□□□ $x_1+x_2>2x_0$.

□□□□□1□□□□□□□□2□□□□□□.

□□□□

□1□□ $g(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x+1$ □□ $g'(x)=\frac{(2x-1)(ax-1)}{x}$ □□□□□□ $\frac{1}{a}$ □ $\frac{1}{2}$ □□□□□□□□□ $g'(x)>0$ □ $g'(x)<0$ □ $x$

□□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $g(x)$ □□□□□□□2□□□□ $F'(x)>0$ □□ $F(x)$ □□□ $(1,2)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□ $x_0\in(1,2)$ □□□ $F(x_0)=f(x_0)-\frac{x_0}{e^{x_0}}=0$ □□□□ $m(x)=\begin{cases} x\ln x, 1<x\le x_0 \\ \frac{x}{e^x}, x>x_0 \end{cases}$ □□□ $x_1+x_2>2x_0$ □□□□

$m(x_1)<m(2x_0-x_1)$ □□ $x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$ □□ $h(x)=x\ln x-\frac{2x_0-x}{e^{2x_0-x}},1<x<x_0$ □□□ $h(x_0)=0$ □□□□□□□□□ $h(x)$ □□□□□

□□ $1<x<x_0$ □□ $h(x)<h(x_0)=0$ □□□□ $x_1\ln x_1<\frac{2x_0-x_1}{e^{2x_0-x_1}}$ □□□□□□□□.

□□□□

□□□1□□□□□□□ $f'(x)=\ln x+1$ □

□ $g(x)=ax^2-(a+2)x+\ln x+1$ □

□ $g'(x)=2ax-(a+2)+\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(ax-1)}{x}$ □

$x>0,a>0$ .

□ $g'(x)=0$ □□ $x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{a}$

① □ $0<a<2$ □□ $\frac{1}{a}>\frac{1}{2}$ □

$g'(x)>0 \Leftarrow 0<x<\frac{1}{2}$ □ $x>\frac{1}{a}$ □

$g'(x)<0 \Leftarrow \frac{1}{2}<x<\frac{1}{a}$ □

□□ $g(x)$ □ $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ □ $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ □□□□□□ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ □□□□□

□□ $g(x)$ □ $x=\frac{1}{2}$ □□□□ $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}-\ln 2$ □

□ $x=\frac{1}{a}$ □□□□ $g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\ln a$.

② □ $a=2$ □□ $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ □ $g'(x)\geq 0$ □□□□□□□□□□□

③ □ $a>2$ □□ $\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$ □ $g'(x)>0 \Leftarrow 0<x<\frac{1}{a}$ □ $x>\frac{1}{2}$ □

$g'(x)<0 \Leftarrow \frac{1}{a}<x<\frac{1}{2}$ □

□□ $g(x)$ □ $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ □ $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ □□□□□□ $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{2}\right)$ □□□□□

□□ $g(x)$ □ $x=\frac{1}{a}$ □□□□ $g\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-\ln a$ □

□ $x=\frac{1}{2}$ □□□□ $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{4}-\ln 2$.

□□□□ $0<a<2$ □□ $g(x)$ □ $x=\frac{1}{2}$ □□□□ $-\frac{a}{4}-\ln 2$ □□ $x=\frac{1}{a}$ □□□□ $-\frac{1}{a}-\ln a$ □□ $a=2$ □□□□□□□ $a>2$ □□ $g(x)$ □

$x=\frac{1}{a}$ □□□□ $-\frac{1}{a}-\ln a$ □□ $x=\frac{1}{2}$ □□□□ $-\frac{a}{4}-\ln 2$.

□2□ $F(x)=x\ln x-\frac{x}{e^x}$ □□□□ $x\in(0,+\infty)$ □

$F'(x)=1+\ln x+\frac{x-1}{e^x}$□□$x\in(1,2)$□

□$F'(x)>0$□□$F(x)$□□□$(1,2)$□□□□□

□$F(1)=-\frac{1}{e}<0$□$F(2)=2\ln 2-\frac{2}{e^2}>0$□

□$F(x)$□□□$(1,2)$□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□$F(x)$□□□$(1,2)$□□□□□□□□□.

□□□□$x_0\in(1,2)$□□□$F(x_0)=f(x_0)-\frac{x_0}{e^{x_0}}=0$□

□□$1<x<x_0$□□$f(x)<\frac{x}{e^x}$□

□$x>x_0$□□$f(x)>\frac{x}{e^x}$□

□□$m(x)=\begin{cases} x\ln x, 1<x\le x_0 \\ \frac{x}{e^x}, x>x_0 \end{cases}$

□$1<x<x_0$□□$m(x)=x\ln x$□

□$m'(x)=1+\ln x>0$□$m(x)$□□□□□

□$x>x_0$□□$m(x)=\frac{x}{e^x}$□

□$m'(x)=\frac{1-x}{e^x}<0$□$m(x)$□□□□□

□$m(x)=n$□□□$(1,+\infty)$□□□□□□□□$x_1,x_2$□$x_1<x_2$□

□$x_1\in(1,x_0),x_2\in(x_0,+\infty)$.

□□$x_1+x_2>2x_0$□□□$x_2>2x_0-x_1$

□$2x_0-x_1>x_0$□□$m(x)$□□□$(x_0,+\infty)$□□□□□□

故可证 $m(x_2) < m(2x_0 - x_1)$，

又由 $m(x_1) = m(x_2)$，

即证 $m(x_1) < m(2x_0 - x_1)$，

即 $x_1\ln x_1 < \dfrac{2x_0 - x_1}{e^{2x_0 - x_1}}$

记 $h(x) = x\ln x - \dfrac{2x_0 - x}{e^{2x_0 - x}}, 1 < x < x_0$，其中 $h(x_0) = 0$

记 $\varphi(t) = \dfrac{t}{e^t}$，则 $\varphi'(t) = \dfrac{1-t}{e^t}$，

当 $t \in (0,1)$ 时，$\varphi'(t) > 0$；

当 $t \in (1,+\infty)$ 时，$\varphi'(t) < 0$，

故 $\varphi(t)_{max} = \dfrac{1}{e}$

而 $\varphi(t) > 0$，故 $0 < \varphi(t) < \dfrac{1}{e}$，

而 $2x_0 - x > 1$，

所以 $-\dfrac{1}{e} < -\dfrac{2x_0 - x}{e^{2x_0 - x}} < 0$，

因此 $h'(x) = 1 + \ln x + \dfrac{1}{e^{2x_0 - x}} - \dfrac{2x_0 - x}{e^{2x_0 - x}} > 1 - \dfrac{1}{e} > 0$，

即 $h(x)$ 单调递增，故当 $1 < x < x_0$ 时，$h(x) < h(x_0) = 0$，

即 $x_1\ln x_1 < \dfrac{2x_0 - x_1}{e^{2x_0 - x_1}}$，故 $x_1 + x_2 > 2x_0$，得证.

【点睛】

本题考查分类讨论求函数的极值以及零点偏移证明不等式.

方法点睛：

（1）根据零点判断两根的范围；

□2□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $x_1+x_2>2x_0$ □□□□ $x_2>2x_0-x_1$ □□□□ $x_1,x_2$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□3□□□□□□□□□□□□ $m(x_2)=m(x_1)$ □□□□□□□ $m(x_1)<m(2x_0-x_1)$ □

□4□□□□□□□□□□□□□□□□.

11□□2020·□□□□□□□□□

□□□□ $f(x)$ □□□□ $[a,b]$ □□□□□□□□□

$f_1(x)=\min\{f(t)\,|\,a\le t\le x\}\ (x\in[a,b])$ □

$f_2(x)=\max\{f(t)\,|\,a\le t\le x\}\ (x\in[a,b])$ □

□□□ $\min\{f(x)\,|\,x\in D\}$ □□□□ $f(x)$ □ $D$ □□□□□□ $\max\{f(x)\,|\,x\in D\}$ □□□□ $f(x)$ □ $D$ □□□□□□□□□□□□□□ $k$ □□□

$f_2(x)-f_1(x)\le k(x-a)$ □□□□ $x\in[a,b]$ □□□□□□□ $f(x)$ □ $[a,b]$ □□“ $k$ □□□□□”□

□I□□ $f(x)=\cos x$ □ $x\in[0,\pi]$ □□□□ $f_1(x)$ □ $f_2(x)$ □□□□□

□II□□□□□ $f(x)=x^2$ □ $x\in[-1,4]$ □□□□ $f(x)$ □□□ $[-1,4]$ □□“ $k$ □□□□□”□□□□□□□□□□ $k$ □□□□□□□□□□□□□

□III□□□ $b>0$ □□□ $f(x)=-x^3+3x^2$ □ $[0,b]$ □□2□□□□□□□ $b$ □□□□□.

□□□□□1□ $f_1(x)=\cos x,x\in[0,\pi]$ □ $f_2(x)=1,x\in[0,\pi]$ □

□2□□□ $k=4$ □□□ $f(x)$ □[-1,4]□□“4□□□□□”□

□3□ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<b\le 1$

□□□□

□□□□□□1□□□ $f(x)$ □□□□□□□ $f_1(x)$ □ $f_2(x)$ □□□□□□2□□□□□ $f(x)=x^2$ □ $x\in[-1,4]$ □□□□□□□□ $f_1(x)$ □ $f_2(x)$ □□□

□□□□□ $f_2(x)-f_1(x)\le k(x-a)$ □□k□□□□□□□□□□.(3)□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□ $f_1(x)$ □ $f_2(x)$ □□□□□□□□□□

$f_2(x)-f_1(x)\le k(x-a)$ □□ k □□□□□.

□□□□□

□1□□□□□□ $f_1(x)=\cos x$□$x\in[0,\pi]$□$f_2(x)=1$□$x\in[0,\pi]$.

□2□ $f_1(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[-1,0)\\ 0, & x\in[0,4]\end{cases}$ □ $f_2(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,1)\\ x^2, & x\in[1,4]\end{cases}$ □ $f_2(x)-f_1(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\in[-1,0)\\ 1, & x\in[0,1)\\ x^2, & x\in[1,4]\end{cases}$

□ $x\in[-1,0]$ □□ $1-x^2\le k(x+1)$ □$\therefore k\ge 1-x$□$k\ge 2$□

□ $x\in(0,1)$ □□ $1\le k(x+1)$ □$\therefore k\ge\frac{1}{x+1}$□$\therefore k\ge 1$□

□ $x\in[1,4]$ □□ $x^2\le k(x+1)$ □$\therefore k\ge\frac{x^2}{x+1}$□ $k\ge\frac{16}{5}$

□□□□□ $k\ge\frac{16}{5}$.□□□ $k=4$□□□ $f(x)$ □ $[-1,4]$ □□“4 □□□□□”.

□3□ $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$ □□ $f'(x)=0$ □ $x=0$□$x=2$.□□ $f(x)$ □□□□□□□

| $x$ | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,2)$ | 2 | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | 4 | ↘ |

□ $f(x)=0$ □$x=0$□$x=3$.

□1□□ $b\le 2$□□ $f(x)$ □ $[0,b]$ □□□□□□□□□ $f_2(x)=f(x)=-x^3+3x^2$ □ $f_1(x)=f(0)=0$ .□□ $f(x)=-x^3+3x^2$ □

$[0,b]$ □□“□□□□□□”□□□□

① $f_2(x)-f_1(x)\le 2(x-0)$ □□ $x\in[0,b]$ □□□□

② 存在 $x\in[0,b]$，使得 $f_2(x)-f_1(x)>(x-0)$ 成立.

① 即：$-x^3+3x^2\le 2x$ 对 $x\in[0,b]$ 恒成立，由 $-x^3+3x^2\le 2x$ 解得 $0\le x\le 1$ 或 $x\ge 2$.

要使 $-x^3+3x^2\le 2x$ 对 $x\in[0,b]$ 恒成立，需且只需 $0<b\le 1$.

② 即：存在 $x\in[0,b]$，使得 $x(x^2-3x+1)<0$ 成立.

由 $x(x^2-3x+1)<0$ 解得 $x<0$ 或 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 所以，只需 $b>\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

综合①②可得 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<b\le 1$

(2) 当 $2<b\le 3$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，在 $[2,b]$ 上单调递减，因此，$f_2(x)=f(2)=4$，$f_1(x)=f(0)=0$，

$f_2(x)-f_1(x)=4$，$x-0=x$，显然当 $x=0$ 时，$f_2(x)-f_1(x)\le 2(x-0)$ 不成立，

(3) 当 $b>3$ 时，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，在 $[2,b]$ 上单调递减，因此，$f_2(x)=f(2)=4$，$f_1(x)=f(b)<0$，

$f_2(x)-f_1(x)=4-f(b)>4$，$x-0=x$，显然当 $x=0$ 时，$f_2(x)-f_1(x)\le 2(x-0)$ 不成立.

综合（1）（2）（3）可得：$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<b\le 1$.

12.（2019·湖南·雅礼中学高三月考（理））记 $\max\{m,n\}$ 表示 $m$，$n$ 中的最大值，如 $\max\{3,\sqrt{10}\}=\sqrt{10}$. 已知函数

$f(x)=\max\{x^2-1,2\ln x\}$，$g(x)=\max\left\{x+\ln x,-x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a\right\}$.

(1) 设 $h(x)=f(x)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$，求函数 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上的零点个数；

(2) 试探讨是否存在实数 $a\in(-2,+\infty)$，使得 $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ 对 $x\in(a+2,+\infty)$ 恒成立？若存在，求 $a$ 的取值范围；若不存在，说明理由.

□□□□□1□2□□2□□□□ $\left(\frac{\ln2-1}{4},2\right]$.

□□□□

□1□□□□□□ $h(x)=f(x)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□2□□□□□ $H(x)=g(x)-\frac{3}{2}x-4a$ □□□□□

□ $x\in(a+2,+\infty)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ 0 □□.

□□□□

□1□□ $F(x)=x^2-1-2\ln x$ □□ $F'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

□ $x>1$ □□ $F'(x)>0$ □ $F(x)$ □□□□□□ $0<x<1$ □□ $F'(x)<0$ □ $F(x)$ □□□□□

□ $F(x)_{\min}=F(1)=0$ □□□ $F(x)\ge0$ □□ $x^2-1\ge2\ln x$ □□□ $f(x)=x^2-1$.

□ $G(x)=3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$ □□□ $f(x)$ □ $G(x)$ □ $(0,1]$ □□□□□□□

□□□□□□□□□ $(0,1]$ □□□□□□□

□ $h(x)$ □ $(0,1]$ □□□□□□□ 2□□□□□ $f(x)=G(x)$ □ $(0,1]$ □□□□□□□.

□2□□□□□□□ $a\in(-2,+\infty)$ □□□ $g(x)<\frac{3}{2}x+4a$ □ $x\in(a+2,+\infty)$ □□□□

□ $\begin{cases}x+\ln x<\frac{3}{2}x+4a\\ -x^2+\left(a^2-\frac{1}{2}\right)x+2a^2+4a<\frac{3}{2}x+4a\end{cases}$ □ $x\in(a+2,+\infty)$ □□□□

□ $\begin{cases}\ln x-\frac{1}{2}x<4a,\\ (x+2)(x-a^2)>0,\end{cases}$ □ $x\in(a+2,+\infty)$ □□□□

① □ $H(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$ □□ $H'(x)=\frac{2-x}{2x}$ □

当$0<x<2$时，$H'(x)>0$，$H(x)$单调递增；当$x>2$时，$H'(x)<0$，$H(x)$单调递减.

所以$H(x)_{max}=H(2)=\ln2-1$，

当$0<a+2<2$即$-2<a<0$时，$4a>\ln2-1$，所以$a>\dfrac{\ln2-1}{4}$，因为$a<0$，所以$a\in\left(\dfrac{\ln2-1}{4},0\right)$，

故当$a\in\left(\dfrac{\ln2-1}{4},0\right)$时，$\ln x-\dfrac{1}{2}x<4a$对$x\in(a+2,+\infty)$恒成立；

当$a+2\geq2$，即$a\geq0$时，$H(x)$在$(a+2,+\infty)$上递减，

所以$H(x)<H(a+2)=\ln(a+2)-\dfrac{1}{2}a-1$.

因为$\left[\ln(a+2)-\dfrac{1}{2}a-1\right]'=\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{2}\leq0$，所以$H(a+2)\leq H(2)=\ln2-1<0$，

故当$a\geq0$时，$\ln x-\dfrac{1}{2}x<4a$对$x\in(a+2,+\infty)$恒成立.

② 若$(x+2)(x-a^2)>0$对$x\in(a+2,+\infty)$恒成立，

则$a+2\geq a^2$，

所以$a\in[-1,2]$.

由①②得，$a\in\left(\dfrac{\ln2-1}{4},2\right]$.

故存在实数$a\in(-2,+\infty)$，使得$g(x)<\dfrac{3}{2}x+4a$对$x\in(a+2,+\infty)$恒成立，且$a$的取值范围为$\left(\dfrac{\ln2-1}{4},2\right]$.

【点睛】

此题考查导数的应用，利用导函数研究函数的单调性，图像，零点等问题，含参问题因为参数取不同范围导致函数单调性发生变化，所以一般分类讨论，属于较难题目.

13.（2011·浙江宁波·一模（理））

函数$f(x)$定义在区间$[a,b]$上，设“$\min\{f(x)|x\in D\}$”表示函数$f(x)$在集合D上的最小值，“$\max\{f(x)|x\in D\}$”表示函数$f(x)$在集合D

□□□□□□□□ $f_1(x)=\min\{f(t)\,|\,a\le t\le x\}(x\in[a,b])$ □

$f_2(x)=\max\{f(t)\,|\,a\le t\le x\}(x\in[a,b])$ □

□□□□□□□□ $k$ □□□ $f_2(x)-f_1(x)\le k(x-a)$ □□□□ $x\in[a,b]$ □□□□□□□

$f(x)$ □□□ $[a,b]$ □□“□ k □□□□□”□

(I) □□□ $f(x)=x^3-3x^2, x\in[0,3]$ □□ $f(x)$ □□□□□□□ $f_1(x), f_2(x)$ □□□□□

(II) □ $m>0$ □□□ $f(x)=x^3-mx^2$ □ $[0,m]$ □□“□ 3 □□□□□”□□ m □□□□□□

□□□□(I) $f_1(x)=\begin{cases}x^3-3x^2, & 0\le x\le 2\\ -4, & 2<x\le 3\end{cases}$ □ $f_2(x)=0$ □(II) $2\sqrt{2}<m\le 2\sqrt{3}.$

□□□□

(I)□□□□□□□□□□□□ 0 □□ $x$ □□□□□□□□□□□□□□□□ 0 □□ $x$ □□□□□□□□□□□□ $f_1(x), f_2(x)$ □□□□□□□□□□□□□(II)

□□□□ $f(x)=x^3-mx^2$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f_1(x), f_2(x)$ □□□□□□“□ 3 □□□□□”□□□□□□□□□□ $m$ □□□□

□□□□

(I)□□ $f'(x)=3x^2-6x$ □□ $f(x)$ □ $[0,2]$ □□□□□□□ $[2,3]$ □□□□□□

□□□ $f(x)$ □□□□□ $\max\{f(0), f(3)\}=0$ □

$f_1(x)=\begin{cases}x^3-3x^2, & 0\le x\le 2\\ -4, & 2<x\le 3\end{cases}$ □

$f_2(x)=0$ □

(II)□□ $f'(x)=3x^2-2mx$ □□ $f(x)$ □ $[0,\frac{2m}{3}]$ □□□□□□□ $[\frac{2m}{3},m]$ □□□□□□

□ $f(0)=f(m)=0$ □ $f(\frac{2m}{3})=-\frac{4m^3}{27}$ □□ $f_1(x)=\begin{cases}x^3-mx^2, & 0\le x\le\frac{2m}{3}\\ -\frac{4m^3}{27}, & \frac{2m}{3}<x\le 3\end{cases}$ □ $f_2(x)=0$ □

$f_2(x)-f_1(x)=\begin{cases} mx^2-x^3, & 0\le x\le \frac{2m}{3} \\ \frac{4m^3}{27}, & \frac{2m}{3}<x\le 3\end{cases}$ □

□□□□□k□ $f_2(x)-f_1(x)\le kx$ □ $x\in[0,m]$ □□□□

□x=0 □□ $k\in N^*$ □□□□

□ $0<x\le\frac{2m}{3}$ □□ $k\ge\frac{f_2(x)-f_1(x)}{x}$ □□□□

□ $\frac{f_2(x)-f_1(x)}{x}=-x^2+mx=-(x-\frac{m}{2})^2+\frac{m^2}{4}\le\frac{m^2}{4}$ , □ $k\ge\frac{m^2}{4}$ □

□ $\frac{2m}{3}<x\le m$ □□ $k\ge\frac{f_2(x)-f_1(x)}{x}$ □□□□□ $\frac{f_2(x)-f_1(x)}{x}=\frac{\frac{4m^3}{27}}{x}=\frac{4m^3}{27x}<\frac{2m^2}{9}$ □

□ $k\ge\frac{2m^2}{9}$ □□□□ $k\ge\frac{m^2}{4}$ □

□ $f(x)$ □ $[0,3]$ □□“□3□□□□□”□□ $2<\frac{m^2}{4}\le3$ □

□□□ $2\sqrt{2}<m\le2\sqrt{3}$

□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□① □□□□ $a\ge f(x)$ □□□( $a\ge f(x)_{max}$ □□)□

$a\le f(x)$ □□□□ $a\le f(x)_{min}$ □□□□② □□□□( $y=f(x)$ □□□ $y=g(x)$ □□□□)□③ □□□□ $f(x)_{min}\ge0$ □ $f(x)_{max}\le0$ □

□□□④ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.